

各向异性非线性 Schrödinger 方程的整体可解性^{*}

赵向青, 崔尚斌
(中山大学数学系, 广东 广州 510275)

摘 要: 研究了各向异性的 Schrödinger 方程 $iu_t + \Delta u + au_{x_1x_1x_1} + bu_{x_1x_1x_1x_1} + |u|^a u = 0$ 的初值问题的整体可解性, 其中 a, b 都是实常数, α 是正常数. 选取合适的 $p = \frac{2(\alpha+2)}{\alpha-2}$, 利用非线性项 $|u|^a u$ 的估计和各向异性的 Schrödinger 算子 $S(t)$ 的 $L^p \rightarrow L^p$ 估计, 以及利用 Banach 不动点定理, 获得了整体 (几乎整体) 解在 $E_s(E_{t_0}^s)$ 中的存在性.

关键词: 各向异性 Schrödinger 方程; Cauchy 问题; 整体 (几乎整体) 解

中图分类号: O175 **文献标识码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2007) 02-0001-04

1 背景及相关定义

本文研究各向异性的 Schrödinger 方程的初值问题:

$$\begin{cases} iu_t + \Delta u + au_{x_1x_1x_1} + bu_{x_1x_1x_1x_1} + |u|^a u = 0 & x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (1)$$

这个方程在物理中有非常重要的应用: Wen 和 Fan^[1] 用该模型描述在平面介质中超短波的传播, Aceves 等^[2] 用这样的模型描述光学纤维中孤立波的传播. 光学纤维中波的传播问题中, 由于各方向的传播不一样, 所以导致了各向异性的 Schrödinger 方程 (见文 [3-4]).

在文 [5] 中, Rbaud 等在证明一般的整体解存在性结果的基础上, 通过选择一类特殊的初始值函数而获得了经典 Schrödinger 方程的自相似解. 不难发现, [5] 中用来证明整体存在定理的方法也适合各向异性的 Schrödinger 方程 (1). 因此本文将借助文 [5] 的方法来研究方程 (1) 的整体可解性问题.

叙述主要结论之前, 先介绍一些记号: $S = S(\mathbb{R}^n)$ 表示速降函数类, 其对偶 $S'(\mathbb{R}^n)$ 表示缓增广义函数类. 设 p 与 q 是满足 $1 < p < \infty, 0 < s < \frac{n}{p}$ 的实数, q 由 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{n}$ 决定. $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 表示以 $|\zeta|^s$ 为特征的拟微分算子, 则齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ 定义为:

$$\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n) = \{ f \in L^p(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)} = \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty \}$$

$$\begin{aligned} & \|(-\Delta)^{\frac{s}{2}} f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \infty \} \\ & \text{解空间 } E^s \text{ 和 } E_{t_0}^s \text{ 取为满足} \\ & \|u\|_{E^s} \equiv \sup_{t>0} \|u\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)} < \infty, \\ & \text{及} \\ & \|u\|_{E_{t_0}^s} \equiv \sup_{0 < t \leq T_0} \|u\|_{\dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)} < \infty, \\ & 0 < T_0 < \infty \end{aligned}$$

的 Bochner 可测函数 $\psi: (0, \infty) \rightarrow \dot{H}_p^s(\mathbb{R}^n)$ 的全体. θ 由定理的证明确定.

定义 1 (1) 若 $b \neq 0$, 对任意的 $\alpha \geq 1$, 定义 $\mathbb{I} = (0, \frac{(2\alpha+3)(\alpha-2)}{2(\alpha+1)\alpha})$;
(2) 若 $b = 0, a \neq 0$, 对任意的 $\alpha \geq 1$, 定义 $\mathbb{I} = (0, \frac{3\alpha^2 - \alpha - 8}{3(\alpha+1)\alpha})$.

定义 2 如果 $\mathbb{I} \neq \emptyset$ ($\mathbb{I} = \mathbb{I}_1, \mathbb{I}_2$), 则称 α 是容许的.

注释 1 为使 $\mathbb{I} \neq \emptyset$ 必须 $\alpha \geq 2$, 为使 $\mathbb{I} \neq \emptyset$ 必须 $\alpha \geq \frac{1+\sqrt{97}}{6}$.

需要说明的是, 以后文中的 C 表示与主要参数无关的常数, 在不同的地方取值可能不一样. 对 $p \geq 1$ 用 $p' = \frac{p}{p-1}$ 表示 p 的共轭指标.

2 结果及引理

本文的主要结果以定理陈述为:

* 收稿日期: 2006-08-22
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471157)
作者简介: 赵向青 (1974 年生), 男, 博士生; 通讯联系人: 赵向青; E-mail: zhao.xiangqing@163.com
(C)1994-2019 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

定理 若 $b \neq 0$, 取 $\alpha > 2$, $s \in \mathbb{I}$, $\theta = \frac{1}{3\alpha} +$

$\frac{4}{3\alpha} p$, $p = \frac{2(\alpha+2)}{\alpha s+2}$ 并设 $\psi(t, x) = [S(\psi\varphi)](x)$, 则有:

(1) (几乎整体解) 对所有的 $0 < T_0 < \infty$, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\|\psi_0\|_{E_{T_0}^s} \leq \varepsilon$$

则初值问题 (1) 存在唯一的解 $u(t, x) \in E_{T_0}^s$ 且 $\|u\|_{E_{T_0}^s} \leq 2\varepsilon$.

(2) (整体解) 假设 $s > \max\{3\frac{a}{2}, 0\}$, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\|\psi_0\|_{E^s} \leq \varepsilon$$

则初值问题 (1) 存在唯一的解 $u(t, x) \in E^s$ 且 $\|u\|_{E^s} \leq 2\varepsilon$.

若 $b = 0$, $a \neq 0$, 取 $\alpha > \frac{1+\sqrt{97}}{6}$, $s \in \mathbb{I}$,

$\theta = \frac{1}{4\alpha} + \frac{3}{2\alpha} p$ 并设 $\psi(t, x) = [S(\psi\varphi)](x)$, 则有:

(1) (几乎整体解) 对所有的 $0 < T_0 < \infty$, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\|\psi_0\|_{E_{T_0}^s} \leq \varepsilon$$

则初值问题 (1) 存在唯一的解 $u(t, x) \in E_{T_0}^s$ 且 $\|u\|_{E_{T_0}^s} \leq 2\varepsilon$.

(2) (整体解) 假设 $a < 0$, 如果存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$\|\psi_0\|_{E^s} \leq \varepsilon$$

则初值问题 (1) 存在唯一的解 $u(t, x) \in E^s$ 且 $\|u\|_{E^s} \leq 2\varepsilon$.

为了方便证明主要结果, 先证明一些引理.

如果自由方程

$$\begin{cases} iu + \Delta u + au_{xx_1x_1} + bu_{xx_1x_2x_2} = 0 \\ x \in \mathbb{R}^2, t \in \mathbb{R} \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

的解可以表示成:

$$u(x, t) = S(\psi\varphi) = (I\psi\varphi)(x, t)$$

其中,

$$\begin{aligned} I(x, t) &= C \int_0^t \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x_1\zeta_1 + x_2\zeta_2) + i(t-\zeta_1^2 - \zeta_2^2 + \zeta_1^4 - \zeta_2^6)} d\zeta_1 d\zeta_2 \\ &= \left(C_1 \int_0^t e^{i(x_1\zeta_1 - \zeta_1^2 - \zeta_1^4 + \zeta_1^6)} d\zeta_1 \right) \times \\ &\quad \left(C_2 \int_0^t e^{i(x_2\zeta_2 - \zeta_2^2 - \zeta_2^6)} d\zeta_2 \right) = I(x_1, t) I(x_2, t) \end{aligned}$$

则有:

引理 1 各向异性薛定谔算子 $S(\psi)$ 有 $L^p - L^p$

估计:

(i) 若 $b \neq 0$, $2 \leq p \leq \infty$, $0 < T_0 < \infty$ 则 $\forall \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, 当 $0 < |t| \leq T_0$ 时有

$$\|S(\psi\varphi)\|_{L^p} \leq C |t|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

且有

$$\|S(\psi\varphi)\|_{H^s_p} \leq C |t|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \|\varphi\|_{H^s_{p'}}, \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

进一步假设 $s > \max\{3\frac{a}{2}, 0\}$, 则上述估计式对所有的 $t \neq 0$ 都成立.

(ii) 若 $b = 0$, $a \neq 0$, $2 \leq p \leq \infty$, $0 < T_0 < \infty$, 则 $\forall \varphi \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$, 当 $0 < |t| \leq T_0$ 时有

$$\|S(\psi\varphi)\|_{L^p} \leq C |t|^{-\frac{3}{4}(1-\frac{2}{p})} \|\varphi\|_{L^{p'}}$$

且有

$$\|S(\psi\varphi)\|_{H^s_p} \leq C |t|^{-\frac{3}{4}(1-\frac{2}{p})} \|\varphi\|_{H^s_{p'}}, \quad \forall s > 0$$

进一步假设 $a < 0$, 则上述估计式对所有的 $t \neq 0$ 都成立.

证明 因为 (i) 和 (ii) 的证明类似, 所以只要给出 (i) 的证明就足够了.

据文 [6] 定理 2.1 知, 当 $0 < |t| \leq T_0$ 时有:

$$\begin{cases} |I(x_1, t)| \leq C |t|^{-\frac{1}{6}}, \\ |I(x_2, t)| \leq C |t|^{-\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (2)$$

从而

$$|I(x, t)| \leq C |t|^{-\frac{2}{3}}$$

应用 Young 不等式得:

$$\|S(\psi\varphi)\|_{L^p} \leq C |t|^{-\frac{2}{3}} \|\varphi\|_{L^1} \quad (3)$$

注意到

$$\|S(\psi\varphi)\|_{L^2} = C \|\varphi\|_{L^2} \quad (4)$$

对 (3), (4) 应用 Resiz-Thorin 插值定理得到:

$$\|S(\psi\phi)\|_{L^p} \leq C |t|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \|\phi\|_{L^{p'}}$$

为证明第 2 个不等式, 只需注意到 $S(\psi)$ 与 $(-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ 的可交换性即可. 事实上, $\forall \omega \in S'(\mathbb{R}^n)$ 有:

$$\begin{aligned} F^1(\omega S(\psi\varphi)) &= F^1(\omega e^{i(x-\zeta_1^2-\zeta_2^2+\zeta_1^4-\zeta_2^6)} \varphi) = \\ &= F^1(e^{i(x-\zeta_1^2-\zeta_2^2+\zeta_1^4-\zeta_2^6)} F^1(\omega\varphi)) = \\ &= S(\psi)(F^1(\omega\varphi)) \end{aligned}$$

特别地, 由第一式得到:

$$\|F^1(\omega S(\psi\varphi))\|_{L^p} \leq$$

$$C |t|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \|F^1(\omega\varphi)\|_{L^{p'}}$$

在上式中取 $\omega = |\zeta|^s$ 即得: $\|S(\psi\varphi)\|_{H^s_p} \leq C \cdot$

$$|t|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \|\varphi\|_{H^s_{p'}}.$$

如果 $s > \max\{3\frac{a}{2}, 0\}$, 则 $\forall \zeta \neq 0$ 都有 $\zeta^2 - \zeta^4 + \zeta^6$ 的二阶导数大于零, 由文 [6] 定理 2.1 和文 [7] 引理 2.1 的证明过程可以看出, 对于所有的 $t \neq 0$, (2) 式都成立, 从而 $L^p - L^p$ 估计也成立.

证毕。

注释 2 在上述 L^p-L^p 估计的基础上很容易导出关于时空可积的 Banach 空间 $L^q_t L^p_x$ 的 Strichartz 估计。这方面的工作以及由此导出的适定性结果这里不详细叙述。

我们还需要对非线性项的估计:

引理 2^[5] 设 $\alpha > 0$, $s \in \mathbb{Z}$ ($j = 1, 2$) 取

$$p = \frac{n(\alpha + 2)}{\alpha + 1 - n}$$

则

$$\| |f|^\alpha \|_{H^s_p} \leq C \|f\|_{H^s_p}^{\alpha+1} \quad (5)$$

及

$$\| |f|^\alpha f - |g|^\alpha g \|_{H^s_p} \leq C \|f - g\|_{H^s_p} \left[\|f\|_{H^s_p}^\alpha + \|g\|_{H^s_p}^\alpha \right] \quad (6)$$

为了揭示选取 $\mathbb{Z}$ ($j = 1, 2$) 的部分根据, 我们给出引理 2 的证明中用到的一条关键引理:

引理 3^[5] 取 $\alpha > 0$, $s > 0$, $1 < r < \infty$ 使得

$$s \leq \min\left(\frac{n}{r} \alpha + 1, (\alpha + 1)\left(\frac{n}{r} - s\right) \leq n \quad (7)$$

记

$$t = \frac{n}{s + (\alpha + 1)\left(\frac{n}{r} - s\right)}$$

则

a) 对任意的 $f \in \dot{H}^s_r$ 有:

$$\| |f|^\alpha \|_{H^s_t} \leq C \|f\|_{H^s_t}^{\alpha+1} \quad (8)$$

及

$$\| |f|^{\alpha+1} \|_{H^s_t} \leq C \|f\|_{H^s_t}^{\alpha+1} \quad (9)$$

b) 进而, 如果 α 是偶数 (奇数) 则 (8) ((9)) 式成立, 不必 $s < \alpha + 1$ 。

注释 3 引理 2 的完整证明见文 [5]。在这里特别指出, 在 (8) 式中取 $r = p$, $t = p$ 便得到 (5)。

3 定理的证明

利用 Banach 不动点定理, 通过求解如下的等价积分方程来实现定理的证明。

$$u(t) = S(t)\phi - i \int_0^t S(t-\tau) |u|^\alpha u(\tau) d\tau$$

由于所有结论的证明都是相似的, 因此, 不必逐一证明。

定义

$$T(u) = S(t)\phi - i \int_0^t S(t-\tau) |u|^\alpha u(\tau) d\tau$$

情形 1 $b \neq 0$ 时, 只证明 (1) (几乎整体解)。

根据引理 1 得知, 对任意的 $\epsilon, t \leq T$ 有:

$$\|T(u)\|_{H^s_p} \leq \|S(t)\phi\|_{H^s_p} +$$

$$\int_0^t \|S(t-\tau) |u|^\alpha u(\tau)\|_{H^s_p} d\tau \leq$$

$$\|u\|_{E^s_{t_0}} + C t.$$

$$\int_0^t \| |t-\tau|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \| |u|^\alpha u(\tau)\|_{H^s_p} d\tau$$

再利用引理 2 得

$$\|T(u)\|_{H^s_p} \leq$$

$$\epsilon + C t \int_0^t \| |t-\tau|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \| \|u\|_{H^s_p}^{\alpha+1} d\tau \leq$$

$$\epsilon + C \|u\|_{E^s_{t_0}}^{\alpha+1} t.$$

$$\int_0^t \| |t-\tau|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \| |\tau|^{-\theta(\alpha+1)} d\tau \leq$$

$$\epsilon + C \|u\|_{E^s_{t_0}}^{\alpha+1} t^{\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})-\theta\alpha}.$$

$$\int_0^t \| |1-\frac{\tau}{t}|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \| |\frac{\tau}{t}|^{-\theta(\alpha+1)} d\tau \leq$$

$$\epsilon + C \|u\|_{E^s_{t_0}}^{\alpha+1} t^{\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})-\theta\alpha}.$$

$$\int_0^t \| |1-\tau|^{-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})} \| |\tau|^{-\theta(\alpha+1)} d\tau \leq$$

$$\epsilon + CB(1-\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p}))$$

$$1-\theta(\alpha+1) \|u\|_{E^s_{t_0}}^{\alpha+1} t^{\frac{2}{3}(1-\frac{2}{p})-\theta\alpha}$$

其中, $B(m, n)$ ($m, n > 0$) 为熟知的 Beta 函数。因

为当取 $\theta = \frac{1}{3\alpha} + \frac{4}{3\alpha p}$ 时, $1 - \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{p}) - \theta\alpha = 0$

且

$$1 - \frac{2}{3}(1 - \frac{2}{p}) > 0 \quad 1 - \theta(\alpha + 1) > 0$$

(10)

从而

$$\|T(u)\|_{H^s_p} \leq \epsilon + C \|u\|_{E^s_{t_0}}^{\alpha+1}$$

故

$$\|T(u)\|_{E^s_{t_0}} \leq \epsilon + C \|u\|_{E^s_{t_0}}^{\alpha+1}$$

选取 $\epsilon \leq (\frac{1}{C_2^{\alpha+1}})^{\frac{1}{\alpha}}$ 并取 $B = \{u \in E^s_{t_0} \mid \|u\|_{E^s_{t_0}} \leq$

$2\epsilon\}$, 则 $T(B) \subseteq B$ 。

利用引理 2 的第 2 个不等式可得:

$$\| |u|^\alpha u - |v|^\alpha v \|_{H^s_p} \leq C \|u(\tau) - v(\tau)\|_{H^s_p} [\|u(\tau)\|_{H^s_p}^\alpha + \|v(\tau)\|_{H^s_p}^\alpha]$$

从而

$$\| |u|^\alpha u - |v|^\alpha v \|_{H^s_p} \leq C t^{-\theta(\alpha+1)}.$$

$$\|u - v\|_{E^s_{t_0}} [\|u\|_{E^s_{t_0}}^\alpha + \|v\|_{E^s_{t_0}}^\alpha]$$

假设 $\|u\|_{E^s_{t_0}} < 2\epsilon$, $\|v\|_{E^s_{t_0}} < 2\epsilon$, 对于足够小的 ϵ , 同上面一样地推理可得:

$$\|T(u) - T(v)\|_{E^s_{t_0}} \leq$$

$$C\varepsilon^{\alpha+1} \|u - v\|_{E_{t_0}^s} \leq \frac{1}{2} \|u - v\|_{E_{t_0}^s}$$

由以上步骤看出 F 是从 B_t 到 B_t 的压缩映射, 根据 Banach 压缩映射原理得知存在唯一 $u \in E_{t_0}^s$. 从上面推理还可以发现 $\|u\|_{E_{t_0}^s} < 2\varepsilon$.

情形 2 $b=0$, $a \neq 0$ 时, 为了兼顾几乎整体解和整体解两个方面的证明, 现证明方程 (2) 整体解. 根据引理 1 有:

$$\begin{aligned} & \|T(u)\|_{H_{\beta}^s} \leq \|S(\psi)\|_{H_{\beta}^s} + \\ & \int_0^t \|S(t-\tau)|u|^\alpha u(\tau)\|_{H_{\beta}^s} d\tau \leq \\ & \|u_0\|_{E^s} + C \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{3}{4}(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{H_{\beta}^s}^\alpha \|u(\tau)\|_{H_{\beta}^s} d\tau \end{aligned}$$

再利用引理 2 得

$$\begin{aligned} & \|T(u)\|_{H_{\beta}^s} \leq \\ & \varepsilon + C \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{3}{4}(1-\frac{2}{p})} \|u\|_{H_{\beta}^s}^{\alpha+1} d\tau \leq \\ & \varepsilon + C \|u\|_{E^s}^{\alpha+1} \int_0^t |t-\tau|^{-\frac{3}{4}(1-\frac{2}{p})} |\tau|^{-\theta(\alpha+1)} d\tau \leq \\ & \varepsilon + C B (1 - \frac{3}{4}(1 - \frac{2}{p}))^{1-\theta(\alpha+1)} \|u\|_{E^s}^{\alpha+1} t^{\frac{3}{4}(1-\frac{2}{p})-\theta\alpha} \end{aligned}$$

因为当取 $\theta = \frac{1}{4} + \frac{3}{2\alpha p}$ 时, $1 - \frac{3}{4}(1 - \frac{2}{p}) - \theta\alpha = 0$, 且

$$1 - \frac{3}{4}(1 - \frac{2}{p}) > 0 \quad 1 - \theta(\alpha+1) > 0$$

从而

$$\|T(u)\|_{H_{\beta}^s} \leq \varepsilon + C \|u\|_{E^s}^{\alpha+1}$$

故

$$\|T(u)\|_{E^s} \leq \varepsilon + C \|u\|_{E^s}^{\alpha+1}$$

取 $B_t = \{u \in E^s \mid \|u\|_{E^s} \leq 2\varepsilon\}$, 剩下步骤与情形 1 相同, 不再赘述.

注释 4 至此可以看出, I_1 , I_2 是由式 (7) 和 (10), (11) 确定的.

参考文献:

- [1] WEN S, FAN D. Spatiotemporal instabilities in nonlinear kermes in the presence of arbitrary higher order dispersion[J]. J Opt Soc Amer B 2002 19: 1653-1659.
- [2] ACEVESA B, ANGELIS De C, TURISYN S K. Multidimensional solitons in fiber arrays[J]. Opt Lett 1995 (19): 329-331.
- [3] FIBICH G, ILAN B, SCHOCHET S. Critical exponents and collapse of nonlinear Schrödinger equations with anisotropic fourth-order dispersion[J]. Nonlinearity 2003 (16): 1809-1821.
- [4] FIBICH G, Papanicolaou G C. Self-focusing in the presence of small time dispersion and nonparaxiality[J]. Opt Lett 1997 22(18): 1379-1381.
- [5] RIBAUD F, YOUSSEFI A. Regular and self-similar solutions of nonlinear Schrödinger equation[J]. J Math Pures Appl 1998(77): 1065-1079.
- [6] CUIS B. Pointwise estimates for a class oscillatory integrals and related $L^p - L^q$ estimates[J]. J Fourier Anal Appl 2005 11(4): 441-457.
- [7] CUIS B, TAO S P. Strichartz estimates for dispersive equations and solvability of the Kawahara equation[J]. J Math Anal Appl 2005 304(2): 683-702.

Global Solvability for a Non-isotropic Nonlinear Schrödinger Equation

ZHAO Xiang-qing CUI Shang-bin

(Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Global solvability of initial value problem for the non-isotropic Schrödinger equation $i u_t + \Delta u + a|u|_{\chi_1 \chi_2 \chi_3} + b|u|_{\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4} + |u|^\alpha u = 0$ (where $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$) is studied. Take $p = \frac{2(\alpha+2)}{\alpha s + 2}$. By using the nonlinear estimate of $|u|^\alpha u$, the $L^p - L^p$ estimate of the non-isotropic Schrödinger operator $S(t)$ and Banach fixed point theorem, the existence of global (almost global) solution in $E_s(E_{t_0}^s)$ is obtained.

Key words: non-isotropic Schrödinger equation; Cauchy problem; global (almost global) solution